

ЛЕКЦІЯ № 1

Основні принципи ньютонівської механіки.

Переміщення на південь або на північ відбувається вранці або ввечері. Переміщення в просторі відбувається в часі.

«Мо-цзи», IV ст. до н.е.

... Самим великим був Ісаак Ньютон.

Вольтер. Філософські листи.

Основні принципи (насправді, аксіоми) ньютонівської механіки були викладені Ньютоном у його трактаті «Математичні початки натуральної філософії» в 1686 році. Наведемо кілька цитат з книги Ньютона для порівняння з сучасним трактуванням цих принципів.

Визначення

маси: кількість матерії є міра такої, що встановлюється пропорційно щільності і об'єму її;

імпульсу: кількість руху є міра такого, що встановлюється пропорційно швидкості і масі;

сили: прикладена сила є дія, вироблена над тілом, щоб змінити його стан спокою або рівномірного прямолінійного руху;

сили інерції: вроджена сила матерії є властива їй здатність опору, ця сила завжди пропорційна масі. Від інерції матерії відбувається, що будь-яке тіло лише насилу виводиться зі свого спокою або руху. Тому "вроджена сила" могла б бути зрозуміло названа «силою інерції»;

часу: абсолютний, справжній, математичний час сам по собі і по самій своїй сутності, без будь-якого відношення до чого-небудь зовнішнього, протікає рівномірно;

простору: абсолютний простір по самій своїй сутності, безвідносно до чого б то не було зовнішнього, залишається завжди однаковим і нерухомим.

Закони:

1. Будь-яке тіло продовжує утримуватися в своєму стані, спокою або рівномірного прямолінійного руху, поки й оскільки воно не примушується прикладеними силами змінити цей стан.

2. Зміна кількості руху пропорційно прикладеній рушійною силою і відбувається у напрямку тієї прямої, по якій ця сила діє.

3. Дії завжди є рівні і протилежне протидія.

Ці закони та визначення, *сформульовані без всяких формул*, стали основою (разом з диференціальним обчисленням) теоретичної механіки з усім її математичним апаратом.

У сучасній мові **основні принципи механіки** (деякі інші принципи, такі як принцип найменшої дії та принцип Д'Аламбера, будуть розглянуті в наступних лекціях), в основі яких лежать експериментальні факти, можуть бути сформульовані наступним чином.

Простір і час. Наш простір одновимірний, однорідний та ізотропний (тобто допускається заміна $t \rightarrow -t$). Простір-тривимірний і евклідовий, тобто він однорідний, ізотропний, і в ньому визначено просторовий відрізок-відстань між точками (довжина відрізка) $l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

Принцип відносності. Існують виділені системи координат, т. зв. *інерціальні* системи, що мають наступні властивості: (а) всі закони природи в усі моменти часу однакові у всіх інерціальних системах координат і (б) всі системи координат, що рухаються щодо деякої інерціальної системи рівномірно і прямолінійно, також є інерціальними. Саме в інерціальній системі відліку тіло, залишене самому собі, рухається рівномірно і прямолінійно або знаходиться в стані спокою.

Принцип детермінізму. Початковий стан механічної системи (сукупність початкових координат і швидкостей всіх матеріальних точок системи в довільний момент часу) однозначно визначає весь її подальший рух.

Коментарі до основних принципів механіки.

Основні поняття механіки: простір, час, сила, швидкість були сформульовані в Стародавній Греції в працях Евкліда (435-365 рр. до н. е.), Архімеда (287-212 рр. до н. е.), Аристотеля (384-322 рр. до н. е.) та інших. Тоді ж були сформульовані зазначені вище властивості простору і часу, в яких

відбувається рух тіл, було сформульовано поняття швидкості (як відношення пройденого шляху до часу, за який він пройдений), яке пов'язує категорії простору і часу. Але, незважаючи на парадокс Зенона, формулювання швидкості, як відносини нескінченно малих величин, тобто dx/dt , було відсутня.

Особливим був внесок Аристотеля, який перший розглянув механіку, як вчення про рух. Ним же було введено поняття про фізичні закони, які постулюються, як результат спостережень природних явищ. (Незважаючи на те, що деякі закони Аристотеля були сформульовані неправильно).

Закони статички (Архімед)

1. У стані рівноваги **сума всіх сил**, що діють на тіло, дорівнює нулю.
2. У стані рівноваги **сумарний момент сил**, що діють на тіло, дорівнює нулю.
3. З експериментальних спостережень випливає також **правило важеля**.

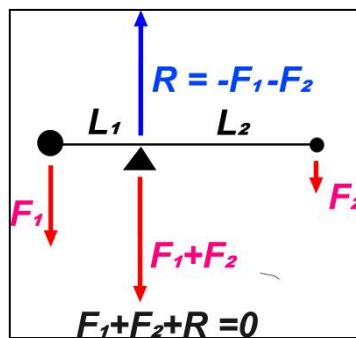
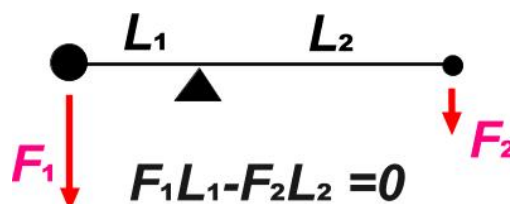


Рис.1.4. Ваги в стані рівноваги і сила реакції.

З Рис.1.4 видно, що рівність нулю всіх сил, що діють на ваги в стані рівноваги, враховує і так звану **силу реакції** \vec{R} , що діє на коромисло з боку опори. Сили тяжіння \vec{F}_i і є прикладами **потенціальних сил**, що діють на систему. В даному прикладі рівність і протилежний напрямок сили тяжіння, що діє з боку коромисла на опору і сили реакції, що діє з боку опори на коромисло, відображають третій закон Ньютона. Для наведеної на Рис.1.4 конфігурації закон важеля має вигляд:



$$F_1 L_i - F_2 L_i = 0. \quad (1.5)$$

У стані рівноваги при закріпленні точки опори коромисло може бути повернуто на довільний кут (Рис.1.5).

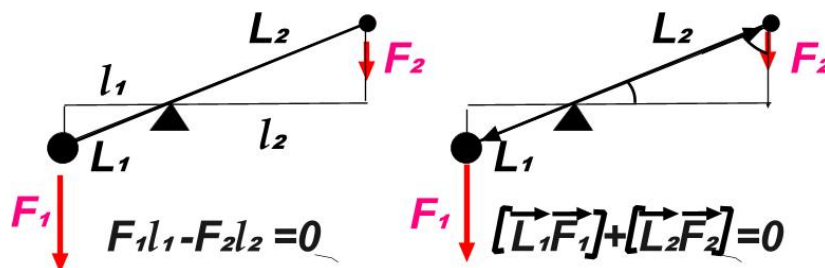


Рис.1.5. Загальний вигляд стану рівноваги ваг.

При цьому правило важеля записується в наступному вигляді:

$$[\vec{L}_1 \vec{F}_1] + [\vec{L}_2 \vec{F}_2] = 0. \quad (1.6)$$

У розглянутому прикладі ми стикаємося з поняттям *зв'язків і віртуальних переміщень* (див.Рис.1.6).



Рис.1.6. Зв'язки та віртуальні переміщення.

У розглянутому прикладі відстані від точок розташування мас до точки опори (довжини плечей коромисла) фіксовані і являють собою так звані *зв'язки* в механічній системі. Наявність таких зв'язків призводять до обмеження *можливих (віртуальних)* переміщень $\delta \vec{R}_i$ і матеріальних точок, в яких сконцентровані маси. В даному прикладі віртуальні переміщення можливі тільки по колах з центром в точці опори ваг. На Рис. 1.7 ця ситуація продемонстрована докладніше: сила тяжіння \vec{F} розкладена на складові вздовж зв'язку і перпендикулярно їй. Складова вздовж зв'язку врівноважується силою реакції \vec{R} . З рисунку очевидно, що в даному випадку віртуальне переміщення відбувається в напрямку, перпендикулярному напрямку сили реакції. Тому виконується співвідношення

$$\vec{R} \delta \vec{r} = 0 \quad (1.7)$$

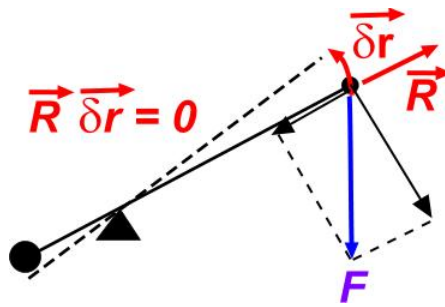


Рис.1.7. Віртуальні переміщення і сили реакції.

Співвідношення (1.7) можна сформулювати в наступному вигляді: робота сили реакції при переміщенні матеріальної точки при наявності зв'язку дорівнює нулю. На Рис.1.8 наведена більш складна система: жорсткий стрижень, закріплений шарнірно на одному кінці, а на іншому кінці шарнірно пов'язаний з двома жорсткими стрижнями, які на протилежних кінцях можуть вільно переміщатися уздовж жорсткої нитки. Як видно з Рис.1.8, в цьому випадку сили реакції спрямовані уздовж стрижнів, а віртуальні переміщення – по дотичним до направляючої нитки, і ці напрямки не ортогональні.

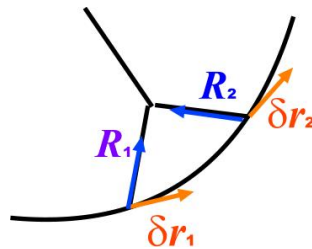


Рис.1.8. Система з двома віртуальними переміщеннями.

У цьому прикладі $\vec{R}\overline{\delta r} \neq 0$, але виконується сумарний закон:

$$\vec{R}_1\overline{\delta r}_1 + \vec{R}_2\overline{\delta r}_2 = 0.$$

Це-окремий випадок принципу віртуальних переміщень, сформульованого Симоном Стевіном вже за нових часів:

Повна віртуальна робота всіх сил реакції дорівнює нулю при будь-яких віртуальних переміщеннях:

$$\sum_i \vec{R}_i\overline{\delta r}_i = 0 \quad (1.8)$$

Наступний етап розвитку механіки відноситься до XV-XX століть і пов'язаний з такими іменами, як Коперник, Браге, Кеплер, Галілей, Ньютон, Мопертюї, Лагранж, Ейлер, Д'аламбер, Гамільтон, Якобі та інші.

Першим кроком можна вважати геліоцентричну модель Н. Коперника (1473-1543) і багаторічні спостереження Тихо Браге (1546-1601) за рухом планет («зірки» Марс). "Таблиці" Тихо Браге з результатами 16-річного спостереження за рухом Марса послужили тим набором фактів, які дозволили І. Кеплеру (1571-1630), що розділяв погляди Коперника, сформулювати феноменологічні закони руху планет. Ці три чудові закони зводяться до наступного.

Перший закон. Всі планети рухаються по еліпсах, в одному з фокусів яких (загальному для всіх планет) знаходиться Сонце (Рис 1.1).

Другий закон. Рух планет такий, що за рівні проміжки часу відрізок, що з'єднує планету з Сонцем, замітає рівні площі: $S_1 = S_2$. Це означає, що в перигелії швидкість орбітального руху планети максимальна, а в афелії – мінімальна (Рис.1.2).

Третій закон. Відношення куба середнього віддалення планети від Сонця до квадрата періоду обертання її навколо Сонця є величина постійна для всіх планет. (на Рис.1.3).

Ці результати Кеплер опублікував у завершальній книзі «Гармонія світу» зі словами: «Жереб кинутий. Я написав книгу або для сучасників, або для нащадків; Мені байдуже – для кого».

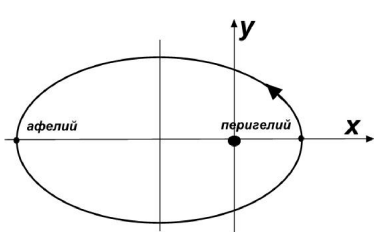


Рис.1.1

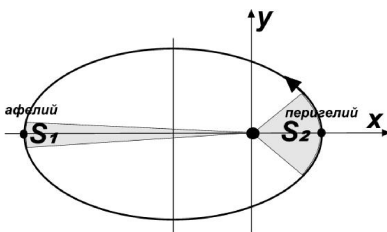


Рис.1.2

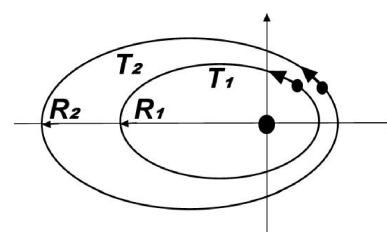


Рис.1.3

Після смерті Кеплера і формулювання І. Ньютоном (1643-1727) рівнянь механіки, тобто рівнянь (1.3) з відомою силою в правій частині – сили гравітаційної взаємодії, також знайденої Ньютоном, стало можливим рішення задачі про планетарний рух. Рішення цієї задачі, яке ми розглянемо на одній з наступних лекцій, показало повну згоду теорії з законами Кеплера. Це стало підтвердженням правильності законів механіки, сформульованих до цього феноменологічно.

Внесок Г. Галілея (1564-1642) в механіку неоціненний, але зараз важливо відзначити формулювання їм зазначеного вище принципу відносності класичної механіки. Він ввів поняття *інерціальної системи* такої, в якій простір є однорідним і ізотропним, а час – однорідним. Тобто це система, в якій виконується перший принцип механіки. Таких систем нескінченне число, і вони відрізняються тим, що рухаються одна щодо одної з постійною швидкістю V . Властивості простору і часу і всі механічні закони в різних інерційних системах відліку однакові. Це означає, що рівняння, яким підпорядковується динаміка рухомих тіл, (і яких у Галілея не було), повинні переходити самі в себе при переході між інерційними системами відліку. При переході від інерціальної системи K в інерційну систему K' , яка рухається відносно першої системи з постійною швидкістю V , **координати і час перетворюються незалежно** і визначаються співвідношеннями

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t, \quad t = t'. \quad (1.1)$$

Ці формули називаються *перетворенням Галілея*, а принцип відносності Галілея можна сформулювати як вимогу інваріантності рівнянь механіки щодо перетворень Галілея. З перетворення (1.1) випливає, що при переході між інерційними системами незалежно зберігаються величини введеного вище інтервалу простору Евкліда $l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ і часовий інтервал $(t_1 - t_2)$.

Пізніше умова еквівалентності механічних законів у різних інерційних системах була доповнена збереженням швидкості світла в цих різних системах. Це призвело до створення релятивістської механіки, в якій просторовий і часовий інтервали окремо не зберігаються при переході між системами, а зберігається інтервал між подіями $\sqrt{c^2(t_1 - t_1)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2}$. При цьому перетворення Галілея (1.1) замінюється перетворенням Лоренца

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}' + \vec{V}t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t = \frac{t' + \vec{V}\vec{r}'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad (1.2)$$

яке переходить в перетворення Галілея (1.1) в граничному випадку малих швидкостей $V/c \ll 1$.

Що стосується сформульованого Ньютоном принципу детермінізму, то з нього, зокрема, випливає, що значення прискорень всіх точок можуть бути виражені через відомі значення координат і швидкостей. У теорії диференціальних рівнянь задання граничних (за часом) умов для функцій

(координат) і їх перших похідних (швидкостей) означає, що рівняння повинні бути другого порядку. Отже, рівняння динаміки сукупності матеріальних точок повинні мати вигляд $\ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{f}_i(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)$. Це узгоджується з однією з формулювань другого Закону Ньютона у вигляді $\dot{\vec{P}} = \vec{F}$, в якій імпульс $\vec{P} = m\vec{V}$ і $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$ – швидкість матеріальної точки. Таким чином, остаточно рівняння Ньютона для точки з номером i має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = \vec{F}_i \left(\vec{r}_j, \frac{d\vec{r}_j}{dt}, t \right), \quad (1.3)$$

де декартові координати всіх точок системи. У окремому випадку, коли швидкості $d\vec{r}_j/dt$ не входять в праву частину (1.3), вона може бути представлена у вигляді $\vec{F}_j = -\partial U / \partial \vec{r}_j$, де $U(\vec{r}_j, t)$ – потенціальна енергія системи. У цьому випадку сила в правій частині є **потенціальною силою**. Член в лівій частині зі знаком мінус Д'аламбером було запропоновано називати силою інерції – $\vec{I}_i = -m_i \ddot{\vec{r}}$. Тепер рівняння Ньютона можна переписати як

$$\vec{I}_i + \vec{F}_i = 0. \quad (1.4)$$

У такому вигляді рівняння Ньютона відповідає **принципу Д'аламбера**, згідно з яким будь-яка система сил в будь-який момент знаходиться в рівновазі, якщо додати до активних сил сили інерції. Узагальнення рівняння (1.4), що включає сили реакції, що виникають в системах зі зв'язками буде розглянуто в наступній лекції.

Створення ньютонівської механіки вперше продемонструвало сучасний науковий підхід, що полягає в зборі даних спостереження на першому етапі, класифікація їх і формулювання феноменологічних законів на наступному етапі, створення далі теорії і, нарешті, перевірка теорії цілеспрямованим експериментом. У сучасній науці цей ланцюжок займає зазвичай кілька років або місяців. У випадку класичної механіки кожен крок займав життя покоління.